Геометрическая алгебра — язык творческого мышления

д.ф.-м.н. В.И. Тарханов

1. Введение

Хорошо известно, что основные научные идеи и представления, в частности в области физики, удобнее всего выражать на языке математики. Но этот язык сегодня имеет много диалектов в виде различных алгебраических систем. Каждая из них разрабатывалась для решения своего класса задач и обладает своими достоинствами и недостатками. Одной из самых мощных и привлекательных среди них является *геометрическая алгебра Клиффорда*.

Еще совсем недавно алгебра Клиффорда рассматривалась научным сообществом как узкая математическая специализация, и мало кто из математиков или физиков мог сказать, что это такое. Из тех кто мог, математики чаще всего воспринимали ее просто как алгебру квадратичных форм, а физики — как разновидность матричной алгебры.

Но уже в 1986 году на Международной конференции «Алгебры Клиффорда и их применения в математической физике» было заявлено, что **алгебра Клиффорда является такой же универсальной и фундаментальной, как система вещественных чисел** [1]. Она расширяет эту систему путем использования геометрической концепции *направления*. Это — система *ориентированных чисел*, и, как таковая, может и должна использоваться в качестве единого языка, объединяющего специалистов большинства известных в настоящее время разделов физики и математики.

В то время многие восприняли эти высказывания весьма скептически. Они казались слишком абстрактными и революционными: казалось, что потребуется переделывать основы науки почти с нуля [2].

Однако прошло всего шесть лет и речь зашла о коренной переработке учебных программ математической подготовки физиков в вузах США на основе геометрической алгебры Клиффорда. Выступая с лекцией по случаю вручения ему за эту деятельность большой золотой медали Эрстеда, Д. Хестенес заявил, что **математика, как язык творческого мышления, слишком важна, чтобы предоставить заботу о ее развитии только математикам** [3].

Что же такое геометрическая алгебра? Откуда она взялась? В чем ее привлекательность? Какие новые возможности для творчества она раскрывает? Чем она интересна для аналитического программирования информационно-обменных процессов активных биологических форм (BIP)? Об этом пойдет речь ниже.

2. Немного истории

Создание исчисления, позволяющего оперировать геометрическими объектами по правилам алгебры, издавна было целью исследований многих математиков. Об этом мечтал немецкий математик, физик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716), к этому стремился французский математик Лазар Никола Карно (1753–1823). Первые шаги к тому, что мы теперь называем геометрической алгеброй, были сделаны пионерами использования комплексных чисел в физике. Датский математик Каспер Вессель (1745–1818), швейцарский математик Жан Робер Арган (1768–1735) и немецкий математик, астроном, физик и геодезист Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) понимали преимущества комплексных чисел при решении двумерных задач, и, в частности, считали, что экспонента от мнимого числа является полезным средством представления вращений в геометрической алгебре.

Однако первые, действительно важные систематические построения такого рода были сделаны в середине XIX века ирландским математиком Уильямом Роуэном Гамильтоном (1805–1865) и немецким математиком Германом Грасманом (1809–1887).

Гамильтон в 1843 году, после многолетних попыток расширить возможности алгебры комплексных чисел до трех измерений, ввел понятие «кватерниона» (отказавшись от свойства коммутативности умножения). Сам он расценивал эти работы как наиболее важный результат своей математической деятельности. Несмотря на простоту использования, кватернионы долгое время не находили полного понимания: алгебра содержала 4 элемента $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, но только три из них относились к описанию вектора. Эта особенность была объяснена только после смерти Гамильтона.

Примерно в это же время, в 1844 году, Грассман разработал концепцию внешней алгебры. Он ввел гиперчисла e_i, которые отождествил с единичными отрезками направленных линий. Произвольный вектор при этом записывался в виде $a^i e_i$, где a^i — скалярные коэффициенты (направляющие косинусы). С этими гиперчислами ассоциировались два произведения:

внутреннее $\quad e_i \cdot e_j = e_j \cdot e_i = \delta_{ij}$

и *внешнее* $\quad e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i.$

Внешнее произведение отождествлялось с направленным сегментом плоскости, и Грассман расширил эту концепцию до включения объектов произвольной более высокой размерности. Важными свойствами внешнего произведения были *ассоциативность* $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$ и *антикоммутативность* $a \wedge b = -b \wedge a$. Грассман был простым школьным учителем и не пользовался популярностью среди современников, отчасти из-за непроницаемости стиля изложения и небрежности в выборе обозначений в своих публикациях. Поэтому в то время его работы долго оставались незамеченными.

В 1878 году английский математик Уильям Кингдом Клиффорд (1845–1879) предложил объединить понятия кватернионной алгебры и внешнего произведения в единое целое, что легло в основу создания *геометрической алгебры*, названной его именем. Он объединил внутреннее и внешнее произведения в единое геометрическое, которое тоже было ассоциативным, как у Грассмана, но обладало совершенно новым качеством: было обратимым. Уравнение типа $ab = C$ получало решение $b = a^{-1}C$. Ни внутреннее, ни внешнее произведения по отдельности не обладали этим свойством. Преждевременный уход из жизни в возрасте 34 лет не позволил ему в полной мере реализовать свои творческие замыслы.

В создании исчисления, позволяющего оперировать геометрическими величинами по правилам алгебры, активное участие приняли также:

- американец Джозайя Уиллер Гиббс (1839–1903);
- англичанин Артур Кэли (1821–1895);
- немец Феликс Христиан Клейн (1849–1925);
- венгр Кароль Шарль Жордан (Йордан) (1871–1959);
- норвежец Софус Мариус Ли (1842–1899);
- француз Эли Жозеф Картан (1869–1951);
- англичанин Оливер Хэвисайд (1850–1925);
- англичанин Уильям Валланс Дуглас Ходж (1903–1975).

В то время как математики искали простую унифицированную геометрическую алгебру, физики решили отказаться от ненужных им в то время бивекторов и кватернионов, и, в основном благодаря усилиям Гиббса и Хэвисайда, приняли гибридную систему исчисления. Гиббс тоже ввел два произведения для векторов. Его скалярное (внутреннее) произведение по существу совпадало с грассмановым, а его векторное произведение было абстрагировано от бивекторов. Векторное произведение двух векторов давало третий вектор, так что его алгебра была замкнутой и не требовала дополнительных элементов. Алгебра Гиббса хорошо соответствовала задачам электромагнетизма и быстро стала популярной. Уже через несколько лет векторная алгебра Гиббса стала (и продолжает оставаться по настоящее время!) практически единственным языком векторного анализа. И это произошло несмотря на явные недостатки векторного произведения — его *неассоциативность* и *невозможность его применения на пространства двух или более трех измерений*.

В результате этих событий алгебра Клиффорда потерялась среди многообразия новых алгебр, создававшихся в конце XIX века [4]. Мало кто понимал тогда ее большие возможности, и вместе с алгеброй кватернионов она переместилась на страницы чисто алгебраических статей.

Прошло еще 20 лет, прежде чем Паули и Дирак заново открыли алгебру Клиффорда. Когда в 1930 году Паули и Дирак начали использовать алгебры Клиффорда в квантовой механике, результат был настолько удачным, что потребовалась строгая аксиоматическая переработка созданного ранее исчисления в терминах современной математики, доступных для физиков.

Дирак в своей теории электричества пришел к алгебре Клиффорда совершенно другим путем. Он пытался найти оператор, квадрат которого был бы лапласианом, и он остановился на матричном операторе $\gamma^\mu \partial_\mu$, где γ-матрицы удовлетворяли соотношению:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2I\eta^{\mu\nu}$$

К сожалению связь с геометрией здесь терялась, и далее γ-матрицы рассматривались как действующие исключительно на внутреннем пространстве спина электрона.

Так все оставалось в течение еще 30 лет. За это время физики приняли на вооружение большое число новых алгебраических систем (координатную геометрию, матричную алгебру, тензорную алгебру, дифференциальные формы, спинорное исчисление), в то время как алгебры Клиффорда по-прежнему рассматривались как исключительная принадлежность теории электрона. И лишь в начале 1960-ых годов два важных события изменили ход развития [5].

Первым была работа Атьяха и Сингера [6], которые поняли важность оператора Дирака в изучении многообразий, допускающих глобальную спиновую структуру. Это привело их к формулировке знаменитых индексных теорем и открыло новые перспективы в области геометрии и топологии. С тех пор алгебры Клиффорда постоянно оказываются в самом центре удивительного многообразия задач по геометрии и топологии [7].

Второй важный шаг, предпринятый в 1960-ых годах, потребовал некоторого времени для проявления своего результата. Давид Хестенес, решая задачи теоретической физики, обратил внимание, что матрицы Дирака можно интерпретировать как векторы. Это привело его к новому восприятию структуры и значения уравнения Дирака и квантовой механики в целом [8].

Хестенес стал искать возможности более широкого использования алгебр Клиффорда. Он понял, что алгебра Клиффорда, как система ориентированных чисел, является естественным языком для формулировки множества теорем и результатов из области алгебры и геометрии. Хестенес потратил более сорока лет на развитие и превращение алгебры Клиффорда в полноценный язык физики, которому он вернул название *геометрической алгебры*, подчеркивая важность использования геометрической интерпретации.

В 1970 и 1972 годах прошли две конференции в Принстоне и Мадрасе, посвященные алгебре Клиффорда и ее применениям. А с 1985 года такие конференции стали регулярными и проводятся раз в два года. Сформировалось сообщество математиков и физиков, интересующихся применениями алгебры Клиффорда, которое сейчас насчитывает около 350 человек и имеет свой сайт <http://www.clifford.org/>. Основные публикации по разработке геометрического исчисления и разнообразным приложениям его в математике и физике можно найти на сайте <http://ModelingNTS.la.asu.edu/GC_R&D.html>

3. Общая характеристика и основные определения

Структура и свойства каждой алгебры Клиффорда зависят от размерности пространства, на котором она определена. В одномерном и двумерном случаях она тривиальна[1] и совпадает с хорошо известными алгебрами действительных и комплексных чисел, соответственно.

Следующей по сложности является алгебра $\mathcal{G}_3$ трехмерного евклидова пространства, которая строится на ортах декартовой системы координат и является удвоением алгебры комплексных чисел. Это — первая некоммутативная (относительно операции умножения) алгебра и последняя ассоциативная (относительно той же операции) алгебра. По сравнению с алгеброй комплексных чисел она обладает рядом структурных особенностей и более богатым ассортиментом операций. Это делает ее незаменимой в ряде физических приложений, одним из которых являются импульсные методы магнитного резонанса [9].

Алгебра $\mathcal{G}_3$ позволяет наряду с чисто геометрическими объектами, такими как скаляры, векторы, ориентированные площади, ориентированные объемы, которые описываются чистыми мультивекторами определенного ранга, пользоваться их различными комбинациями, получившими название *кватернионов*, *паравекторов* и *спиноров*, а также установить простые математические соотношения между ними.

К числу достоинств геометрической алгебры относится то, что она позволяет классифицировать объекты по типам (градуирование), перемножать разнородные элементы алгебры между собой и объединять их с помощью операций сложения для совместного анализа динамики изменения состояний рассматриваемых объектов.

[1]Не содержит в себе геометрических элементов, если не считать малоизвестной двугранной алгебры $\mathcal{G}_1^1$ на прямой.

Геометрическая алгебра $\mathcal{G}$ представляет собой градуированную линейную алгебру пространства, элементы которой называют мультивекторами. Элементы ранга 0 называют *скалярами* и отождествляют с элементами поля вещественных чисел. Элементы ранга 1 называют *векторами* и представляют в виде ориентированных сегментов прямых линий.

По определению все элементы алгебры $\mathcal{G}$ обладают свойством сложения, и каждый из ее подклассов, соответствующих определенному рангу, замкнут относительно этой операции. Вводится также операция умножения, которая ассоциативна и дистрибутивна, хотя и не коммутативна (за исключением умножения на скаляр).

Последней аксиомой, которая отличает геометрическую алгебру от других ассоциативных алгебр, является утверждение, что *квадрат любого вектора является скаляром*.

Пусть даны два вектора a и b, тогда квадрат их суммы описывается выражением

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + (ab+ba) + b^2. \tag{1}$$

Отсюда следует, что

$$ab + ba = (a+b)^2 - a^2 - b^2, \tag{2}$$

и поэтому $(ab+ba)$ также является скаляром. Учитывая это, геометрическое произведение двух векторов a и b можно представить в виде суммы двух слагаемых

$$ab = a \cdot b + a \wedge b, \tag{3}$$

где

$$a \cdot b \equiv \frac{1}{2}(ab + ba) \tag{4}$$

есть обычное скалярное, или *внутреннее*, произведение (вещественный скаляр), а

$$a \wedge b \equiv \frac{1}{2}(ab - ba) \tag{5}$$

есть антисимметричное *внешнее* произведение двух векторов, впервые введенное Грассманом. Величина $a \wedge b$ не является ни скаляром, ни вектором. Она имеет отрицательный квадрат, называется *бивектором* и может интерпретироваться как ориентированный сегмент плоскости. Бивектор всегда лежит в плоскости, проходящей через векторы a и b независимо от размерности векторного пространства, в котором лежит эта плоскость. Бивектор обладает величиной $|a||b|\sin\theta$, численно равной площади сегмента, но не определяет форму плоской фигуры, ограничивающей эту площадь. Бивекторы образуют линейное пространство, хотя и не все бивекторы можно выразить через внешнее произведение двух векторов.

Определения внутреннего и внешнего произведений расширяются на геометрическое произведение вектора с мультивектором A_r ранга r в виде

$$aA_r = a \cdot A_r + a \wedge A_r, \tag{6}$$

где внутреннее произведение

$$a \cdot A_r \equiv \langle aA_r \rangle_{r-1} = \frac{1}{2}(aA_r - (-1)^r A_r a) \tag{7}$$

понижает ранг A_r на единицу, а внешнее произведение

$$a \wedge A_r \equiv \langle aA_r \rangle_{r+1} = \frac{1}{2}(aA_r + (-1)^r A_r a) \tag{8}$$

увеличивает ранг на единицу. Здесь $\langle A \rangle_r$ означает результат операции выделения из A ее составляющей ранга r (операция проецирования). В дальнейшем скалярную (ранга 0) часть A будем обозначать просто как $\langle A \rangle$.

Вся мультивекторная алгебра строится путем последовательного перемножения векторов. Мультивекторы, содержащие элементы только одного ранга, называют *однородными* и обозначают через A_r, чтобы показать, что A содержит только компоненту ранга r. Однородные мультивекторы, образуемый внешним произведением набора (независимых) векторов, называют *гранями*[2].

Геометрическое произведение двух однородных мультивекторов ранга r и s может быть представлено в виде

$$A_r B_s = \langle AB \rangle_{r+s} + \langle AB \rangle_{r+s-2} \ldots \langle AB \rangle_{|r-s|}. \tag{9}$$

Символы «$\cdot$» и «$\wedge$» сохраняются для членов наинизшего и наивысшего рангов этого ряда, так что

$$A_r \cdot B_s \equiv \langle AB \rangle_{|s-r|}, \tag{10}$$

$$A_r \wedge B_s \equiv \langle AB \rangle_{s+r}, \tag{11}$$

которые называют внутренним и внешним произведениями, соответственно. Внешнее произведение ассоциативно и удовлетворяет свойству симметрии

$$A_r \wedge B_s = (-1)^{rs} B_s \wedge A_r. \tag{12}$$

[2]В англоязычной литературе используется термин *blade*

Среди составных частей геометрического произведения мультивекторов различают также два новых вида произведений. Первым является *скалярное* произведение

$$A * B \equiv \langle AB \rangle. \tag{13}$$

Оно коммутативно и обладает свойством циклической перестановки сомножителей

$$\langle A \dots BC \rangle = \langle CA \dots B \rangle. \tag{14}$$

В положительно определенных пространствах скалярное произведение определяет модуль функции

$$|A| \equiv (A * A)^{1/2}. \tag{15}$$

Вторым новым произведением является *коммутаторное* произведение, определяемой соотношением

$$A \times B \equiv \frac{1}{2}(AB - BA). \tag{16}$$

Ассоциативность геометрического произведения гарантирует, что коммутаторное произведение удовлетворяет тождеству Якоби

$$A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = 0. \tag{17}$$

Мультивекторы подвержены действию трех операций сопряжения. Одной из них является *обращение* (reversion). Оно обращает порядок перемножения векторов в любом мультивекторе. Результат обращения мультивектора A записывают как $A^\dagger$ и называют *обращенным* от A. Обращенным от вектора является сам вектор, а для произведения мультивекторов имеет место соотношение

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger. \tag{18}$$

Для однородного мультивектора справедливо соотношение

$$A_r^\dagger = (-1)^{r(r-1)/2} A_r. \tag{19}$$

Другой операцией является *геометрическое сопряжение*. Его смысл заключается в инверсии векторного базиса относительно начала координат. В результате все векторы меняют направление на противоположное, что приводит к изменению знака у составляющих мультивектора нечетного ранга. Составляющие четного ранга остаются инвариантными к этой операции. Геометрическое сопряжение (ранговая инволюция) обозначается чертой над буквенным обозначением мультивектора и описывается выражением:

$$\overline{A}_r = (-1)^r A_r. \tag{20}$$

Третьей операцией, называемой *полным* или *клиффордовым* сопряжением является совместное действие указанных выше операций. Обе операции сопряжения коммутируют между собой и могут выполняться в любом порядке:

$$\overline{A}_r^{\dagger} = (-1)^r(-1)^{r(r-1)/2}A_r. \tag{21}$$

В геометрической алгебре, наряду с соглашением о суммировании по повторяющимся индексам, действует соглашение о порядке выполнения операций. *В отсутствие скобок внутреннее, внешнее и скалярное произведения имеют приоритет над геометрическими произведениями.* Таким образом, $a \cdot bc$ означает $(a \cdot b)c$, а не $a \cdot (bc)$. Это соглашение позволяет исключить неоправданно большое количество скобок.

Дальнейшие рассуждения будут связаны с конкретными типами алгебр, создаваемых в конечномерных пространствах. Для построения алгебры необходимо ввести ортонормированную систему векторов $\{e_i\}$, удовлетворяющую условию

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \tag{22}$$

или

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij}. \tag{23}$$

Введение базисного набора из n независимых ортонормированных векторов $\{e_i\}$ определяет базис для всей алгебры, генерируемый этими векторами:

$$e_0 \equiv 1, \{e_i\}, \{e_i \wedge e_j\}, \{e_i \wedge e_j \wedge e_k\}, \ldots, e_1 \wedge e_2 \ldots \wedge e_n \equiv I. \tag{24}$$

Любой мультивектор можно разложить в этом базисе, хотя одно из достоинств геометрической алгебры заключается именно в возможности выполнять множество вычислений независящим от базиса образом.

Грань наивысшего ранга в геометрической алгебре (24) называется *псевдоскаляром* (или *ориентированным элементом объема*) и имеет особое значение. Ее единица имеет специальное обозначение I (или i в случае трех измерений). Это однородная грань, и знания I достаточно для точного определения векторного пространства, над которым определена рассматриваемая алгебра. Псевдоскаляр определяет также операцию дуальности для алгебры, поскольку умножение мультивектора ранга r на I переводит его в мультивектор ранга $(n - r)$.

4. Геометрическая алгебра на прямой

Обычно считают, что одномерное векторное пространство не обладает достаточно интересной геометрической структурой. Однако соответствующая ему геометрическая алгебра представляет определенный интерес, поскольку часто встречается в качестве подалгебры в алгебрах пространств более высокой размерности и существенно отличается от алгебры комплексных чисел. Базис алгебры[3] $\mathcal{G}_1^1$ состоит из двух элементов: единичного скаляра e_0 и единичного вектора a. В отличие от базиса алгебры комплексных чисел, оба базисных элемента обладают положительным квадратом, $e_0^2 = e_0$, $a^2 = e_0$. Благодаря этому базис алгебры можно представить также в виде двух идемпотентных паравекторов[4] $\{P, N\}$ [9]:

$$P = \frac{1}{2}(e_0 + a), \qquad N = \frac{1}{2}(e_0 - a), \tag{25}$$

обладающих свойствами:

- Они являются идемпотентами второго порядка, то есть квадрат каждого паравектора равен ему самому, хотя сам паравектор отличен от нуля и единицы
$$P^2 = P \neq 0, e_0; \quad N^2 = N \neq 0, e_0. \tag{26}$$

- Они находятся в независимых (ортогональных) подпространствах, поскольку являются делителями нуля.
$$PN = NP = 0. \tag{27}$$

- Они преобразуются друг в друга при инверсии определяющего их вектора относительно начала координат
$$\overline{P} = N; \quad \overline{N} = P. \tag{28}$$

- При умножении справа и слева на определяющий их вектор a они поразному воспринимают ориентацию этого вектора. Положительные паравектор P остается инвариантным, а отрицательный паравектор N изменяет знак:
$$aP = Pa = P; \qquad aN = Na = -N \tag{29}$$

Последнее свойство переносится на другие элементы алгебры операциями правого и левого одностороннего умножения:

$$e_0P = aP = P; \qquad e_0N = -aN = N. \tag{30}$$

[3]Верхний индекс называется индексом сигнатуры и характеризует избыток числа векторов с положительным квадратом над числом векторов с отрицательным квадратом.

[4]Паравектором в алгебрах Клиффорда называют мультивектор, состоящий из скаляра и вектора. Понятие было введено в 1989 году Дж.Г.Максом (J.G.Maks), Нидерланды, в его докторской диссертации, с.22.

$$Pe_0 = Pa = P; \qquad Ne_0 = -Na = N. \tag{31}$$

Такое проецирование приводит к формированию правых и левых спинорных идеалов, элементы которых не обладают свойством деления.

Вся алгебра расслаивается на прямую сумму двух независимых (ортогональных) паравекторных составляющих (граней), каждая из которых описывает рассматриваемые геометрические объекты (скаляры и векторы) в проективных пространствах нулевой размерности, то есть в поле вещественных чисел. Проекции единичного скаляра и единичного вектора в положительное паравекторное (спинорное) подпространство совпадают, а в отрицательном паравекторном (спинорном) подпространстве они различаются знаком. Значит для правильной интерпретации их геометрической сущности, то есть для их *стереоскопического* восприятия, необходимо сравнивать их описания в обоих проективных подпространствах:

$$P + N = e_0; \qquad P - N = a. \tag{32}$$

Вместо привычной алгебры комплексных чисел $\mathcal{G}_1^{-1}$, в которой векторные элементы отсутствуют, мы получаем здесь *двугранную* (dihedral) алгебру $\mathcal{G}_1^1$ над полем вещественных чисел [10]: $\mathcal{G}_1^1 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = {}^2\mathbb{R}$.

Эта алгебраическая конструкция оказывается очень полезной в пространствах более высокой размерности, где она проецирует мультивекторные объекты в проективные подпространства положительной и отрицательной определенности, которые имеют смысл «правой» и «левой» систем координат, соответственно.

5. Геометрическая алгебра на плоскости

5.1. Мультивекторный базис

В двух измерениях выберем два ортонормированных базисных вектора e_1 и e_2. Они удовлетворяют соотношениям

$$e_1^2 = e_0, \quad e_2^2 = e_0; \qquad e_1 \cdot e_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e_1e_2 = -e_2e_1. \tag{33}$$

Внешнее произведение $e_{12} = e_1 \wedge e_2$ представляет собой единичный сегмент ориентированной площади. Это исчерпывает мультивекторные геометрически значимые величины, которые мы можем сформировать из этих базисных векторов:

$$\begin{array}{ccc} e_0, & \{e_1, e_2\}, & e_{12}. \\ \text{скаляр} & \text{векторы} & \text{бивектор} \end{array} \tag{34}$$

Любой мультивектор можно разложить по этим четырем базисным элементам. При сложении мультивекторов мы просто складываем коэффициенты у каждой составляющей.

Бивектор e_{12}, играющий в этом пространстве роль псевдоскаляра, не коммутирует с векторными составляющими мультивекторного базиса

$$e_{12}e_1 = -e_2, \qquad e_1e_{12} = e_2, \tag{35}$$

$$e_{12}e_2 = e_1, \qquad e_2e_{12} = -e_1, \tag{36}$$

имеет отрицательный квадрат

$$(e_{12})^2 = e_1e_2e_1e_2 = -e_1e_1e_2e_2 = -e_0. \tag{37}$$

и может рассматриваться как оператор поворота на 90 градусов в рассматриваемой плоскости.

Основным достоинством такого подхода является отсутствие необходимости использования нормали к плоскости, которая в двумерном пространстве не определена.

5.2. Паравекторное расслоение

Как и в случае одномерного векторного пространства мы можем ввести здесь паравекторное расслоение. Для этого можно использовать любой единичный вектор в нашей плоскости и, в частности, любой из базисных векторов e_1 или e_2. Для определенности выберем вектор e_1. Тогда базисные паравекторы принимают вид

$$P = \frac{1}{2}(e_0 + e_1); \qquad N = \frac{1}{2}(e_0 - e_1). \tag{38}$$

Их основные свойства выражаются соотношениями:

$$\begin{cases} P^2 = P; \qquad N^2 = N; \\ PN = NP = 0; \\ \overline{P} = N; \quad \overline{N} = P; \qquad P^\dagger = P; \quad N^\dagger = N \\ P + N = e_0; \quad P^2 + N^2 = e_0; \quad \dots \quad P^n + N^n = e_0; \\ P - N = e_1; \quad P^2 - N^2 = e_1; \quad \dots \quad P^n - N^n = e_1; \\ e_1P = Pe_1 = P; \qquad e_1N = Ne_1 = -N. \end{cases} \tag{39}$$

Как и в случае одномерного векторного пространства паравекторы P и N можно использовать в качестве проекторов при правом и левом одностороннем умножении. Применив такое проецирование к элементам мультивекторного базиса (34), получаем базисы четырех проекционных подпространств:

- Контравариантное положительное:

$$e_0 P = e_1 P = P; \quad e_2 P = e_{21} P = (e_2 P). \tag{40}$$

- Контравариантное отрицательное:

$$e_0 N = -e_1 N = N; \quad e_2 N = -e_{21} N = (e_2 N). \tag{41}$$

- Ковариантное положительное:

$$P e_0 = P e_1 = P; \quad P e_2 = P e_{12} = (P e_2). \tag{42}$$

- Ковариантное отрицательное:

$$N e_0 = -N e_1 = N; \quad N e_2 = -N e_{12} = (N e_2). \tag{43}$$

По сравнению с одномерным пространством мы получаем новые базисные элементы

$$\begin{aligned}(e_2 P) = e_2 \frac{1}{2}(e_0 + e_1) = \frac{1}{2}(e_2 + e_{21}) = \\ = \frac{1}{2}(e_2 - e_{12}) = \frac{1}{2}(e_0 - e_1) e_2 = (N e_2)\end{aligned} \tag{44}$$

и

$$\begin{aligned}(e_2 N) = e_2 \frac{1}{2}(e_0 - e_1) = \frac{1}{2}(e_2 - e_{21}) = \\ = \frac{1}{2}(e_2 + e_{12}) = \frac{1}{2}(e_0 + e_1) e_2 = (P e_2).\end{aligned} \tag{45}$$

С одной стороны, их можно рассматривать как составные элементы мультивекторного базиса, представляющие собой полусумму и полуразность единичного вектора и единичного бивектора, образованного с участием этого вектора. С другой стороны, они являются базисными элементами подпространств, в которые проецируются все элементы нашей мультивекторной алгебры путем одностороннего умножения на выбранные нами комплиментарные паравекторы P и N. Легко проверить, что эти новые элементы обладают свойством *нильпотентности*:

$$\begin{cases} (e_2 P)^2 = (N e_2)(e_2 P) = (N e_2)^2 = 0; \\ (e_2 N)^2 = (P e_2)(e_2 N) = (P e_2)^2 = 0, \end{cases} \tag{46}$$

то есть тоже являются делителями нуля, но уже другого типа.

Как и в случае одномерного векторного пространства все проекции элементов мультивекторного базиса (34) в подпространства паравекторных расслоений имеют только вещественные значения. Эти значения в подпространствах положительной и отрицательной знакоопределенности различаются знаком для скаляра и вектора, а также для вектора и бивектора. Поэтому для однозначного восстановления ранга проецируемого объекта, для стереоскопического восприятия пространства, необходимо сравнивать результаты проецирования в подпространства различной знакоопределенности.

6. Геометрическая алгебра трехмерного евклидова пространства

6.1. Мультивекторный базис

Мультивекторный базис алгебры состоит из 8 элементов — единичного скаляра, трех взаимно ортогональных единичных векторов, трех взаимно ортогональных единичных бивекторов (ориентированных плоскостей), и тривектора — ориентированного единичного объема, ассоциируемого с мнимой единицей:

$$\{e_0,\ e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_{12},\ e_{23},\ e_{31},\ e_{123}\}, \tag{47}$$

где $e_{ik} = e_i \wedge e_k$ есть единичные бивекторы, а $e_{123} = e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 = i$ представляет собой единичный тривектор.

Четыре элемента этого базиса — скаляр и три вектора — обладают положительным квадратом:

$$e_0^2 = e_0, \quad e_1^2 = e_0, \quad e_2^2 = e_0, \quad e_3^2 = e_0. \tag{48}$$

Другие четыре элемента базиса — три бивектора и тривектор (ориентированный объем) — обладают отрицательным квадратом, характерным для мнимой единицы:

$$(e_{12})^2 = (e_{23})^2 = (e_{31})^2 = (e_{123})^2 = -e_0. \tag{49}$$

Поле вещественных чисел представляет собой бесконечную прямую линию. Линия ориентирована, поскольку положительные и отрицательные значения на ней различаются. Решетка целых чисел играет роль шкалы, которая зависит от выбранного масштабного множителя и размерности измеряемых единиц. В целом поле вещественных чисел можно рассматривать как некоторую линейку, которая прикладывается к величинам любой размерности и физического смысла: скалярам, единицам длины, веса, энергии, частоты, скорости, плотности и т.д.

Будем рассматривать геометрические конструкции только над полем вещественных чисел, имея ввиду, что в разложении любого числа Клиффорда по базисным мультивекторам коэффициенты при мультивекторах могут принимать только вещественные значения.

Обратными элементами базисных элементов с положительным квадратом являются сами эти элементы:

$$e_0^{-1} = e_0, \quad e_1^{-1} = e_1, \quad e_2^{-1} = e_2, \quad e_3^{-1} = e_3. \tag{50}$$

Обратными элементами базисных элементов с отрицательным квадратом являются противоположные им элементы, то есть элементы с противоположным знаком, которые получаются с помощью операции обращения:

$$\begin{cases} {e_{123}}^{-1} = e_{123}^\dagger = e_{321} = -e_{123}, \\ {e_{12}}^{-1} = e_{12}^\dagger = e_{21} = -e_{12}, \\ {e_{23}}^{-1} = e_{23}^\dagger = e_{32} = -e_{23}, \\ {e_{31}}^{-1} = e_{31}^\dagger = e_{13} = -e_{13}. \end{cases} \tag{51}$$

Изменение знака имеет смысл изменения ориентации соответствующих геометрических базисных элементов.

В общем случае каждый мультивектор будем представлять в виде произведения скалярного множителя на соответствующий базисный элемент, характеризующий мультивекторную размерность. Тогда обратный мультивектор будет представлен произведением обратных скалярного и мультивекторного сомножителей. Таким образом, обратной вектору величиной будет вектор того же направления, но с обратным значением скаляра:

$$a^{-1} = \frac{a}{|a|^2}, \tag{52}$$

а обратной бивектору величиной будет бивектор обратной скалярной величины и противоположного направления:

$$B^{-1} = -\frac{B}{|B|^2}. \tag{53}$$

Общий элемент геометрической алгебры трехмерного евклидова пространства записывается в виде суммы скаляра S, вектора V, бивектора B и тривектора T:

$$A = S + V + B + T. \tag{54}$$

Его составные части реагируют на операции сопряжения следующим образом:

$$\overline{A} = S - V + B - T \qquad \text{инверсия;} \tag{55}$$

$$A^{\dagger} = S + V - B - T \qquad \text{обращение;} \tag{56}$$

$$\overline{A}^{\dagger} = S - B - T + V \qquad \text{полное сопряженеие.} \tag{57}$$

Псевдоскалярный элемент алгебры e_{123} коммутирует со всеми другими элементами мультивекторного базиса, что характерно для векторных пространств нечетной размерности.

6.2. Отражения и вращения

Одной из наиболее ярких иллюстраций силы геометрической алгебры является простота, с которой она описывает отражения и вращения. Ключ к этому подходу состоит в том, что если задан некоторый единичный вектор b ($b^2 = e_0$), то для любого единичного вектора a, выходящего из начала координат, симметричный ему относительно вектора b вектор описывается произведением bab. Плоскость, перпендикулярная вектору b характеризуется единичным бивектором ib. Вектор, симметричный относительно этой плоскости вектору a, описывается произведением $(ib)a(ib) = -bab$, что как раз и является вектором, противоположным по направлению вектору bab.

Складывая вектор a с вектором bab и беря половину этой величины, получаем

$$\frac{1}{2}(a + bab) = \frac{1}{2}(ab + ba)b = (a \cdot b)b, \tag{58}$$

что и является проекцией вектора a на вектор b.

Складывая вектор a с вектором $-bab$ и беря половину этой величины, получаем

$$\frac{1}{2}(a - bab) = \frac{1}{2}(ab - ba)b = (a \wedge b)b, \tag{59}$$

что составляет проекцию вектора a на плоскость ib.

Эта формула для отражения расширяется на произвольные мультивекторы. Например, если векторы a и c отражаются в плоскости ib, перпендикулярной к вектору b, то бивектор $a \wedge c$ также отражается в ней

$$((ib)a(ib)) \wedge ((ib)c(ib)) = \frac{1}{2}(babbcb - bcbbab) = b(a \wedge c)b. \tag{60}$$

Вращения строятся из пар отражений. Выбирая сначала отражение в плоскости, перпендикулярной к n, а затем в плоскости, перпендикулярной к

m, получаем новый вектор

$$(im)(in)a(in)(im) = mnanm = RaR^{\dagger}, \tag{61}$$

где

$$R \equiv mn. \tag{62}$$

Мультивектор R называется *унитарным кватернионом*[5]. Он состоит только из элементов четного ранга и удовлетворяет тождеству

$$RR^{\dagger} = R^{\dagger}R = e_0. \tag{63}$$

Уравнение (63) гарантирует, что скалярное произведение двух векторов инвариантно относительно вращений,

$$(RaR^{\dagger}) \cdot (RbR^{\dagger}) = \langle RaR^{\dagger}RbR^{\dagger} \rangle = \langle aR^{\dagger}RbR^{\dagger}R \rangle = \langle ab \rangle = a \cdot b. \tag{64}$$

Преобразование $a \mapsto Ra\widetilde{R}$ является весьма общим способом описания вращений. При выводе этого преобразования размерность пространства векторов ни коим образом не учитывалась. В результате этот закон преобразования работает во всех пространствах, *независимо от их размерности*. Кроме того, оно справедливо для всех типов геометрических объектов, *независимо от их ранга*. Мы можем убедиться в этом, рассматривая изображение произведения ab, когда как вектор a, так и вектор b поворачиваются. В этом случае после поворота ab превращается в

$$RaR^{\dagger}RbR^{\dagger} = RabR^{\dagger}. \tag{65}$$

Унитарные кватернионы можно представить в виде

$$R = \pm e^{B/2}, \tag{66}$$

где B есть бивектор, описывающий плоскость, в которой происходит вращение. Величина

$$b = e^{\alpha B/2} a e^{-\alpha B/2} \tag{67}$$

после разложения экспонент в ряд Тейлора относительно α оказывается чистым вектором,

$$b = a + \alpha B \cdot a + \frac{\alpha^2}{2!} B \cdot (B \cdot a) + \dots . \tag{68}$$

Правая часть уравнения (68) является вектором, поскольку внутреннее произведение вектора и бивектора всегда является вектором.

[5] В алгебрах более высокой размерности его называют *ротором*

Представление вращений с помощью унитарных кватернионов, как известно, является самым удобным и элегантным [12] в трех измерениях. В пространствах более высоких размерностей эти преимущества становятся еще более ощутимыми.

Посмотрев как отдельные унитарные кватернионы используются для описания вращений, мы должны посмотреть на закон их композиции. Пусть унитарный кватернион R преобразует единичный вектор a в вектор b,

$$b = RaR^{\dagger}. \tag{69}$$

Теперь повернем b в другой вектор b', используя унитарный кватернион R'. Для этого требуется, чтобы

$$b' = R'bR'^{\dagger} = (R'R)a(R'R)^{\dagger}, \tag{70}$$

так что преобразование описывается новым унитарным кватернионом

$$R \mapsto R'R, \tag{71}$$

который строится по правилу (левосторонней) групповой комбинации для кватернионов. Очевидно, что произведение двух унитарных кватернионов является третьим унитарны кватернионом,

$$R'R(R'R)^{\dagger} = R'RR^{\dagger}R'^{\dagger} = R'R'^{\dagger} = e_0, \tag{72}$$

так что унитарные кватернионы действительно образуют группу (Ли).

Полезность унитарных кватернионов является хорошим доказательством необходимости сложения величин различного ранга. Кватернион R сам по себе не имеет геометрического смысла. Иными словами, никакого смысла нельзя придать по отдельности скалярной и бивекторной частям R. По-видимому это связано с тем, что он является *4-мерным объектом смешанного ранга*, с которым мы еще не привыкли работать. Однако, когда R записывается в виде $R = \pm e^{B/2}$, бивектор имеет ясный геометрический смысл, как и вектор, образуемый из $RaR^{\dagger}$. Это иллюстрирует основное свойство геометрической алгебры, которое состоит в том, что как геометрически значимые объекты (скаляры, векторы, плоскости, ...), так и объекты, которые действуют на них или *состоят из них* (роторы, кватернионы, паравекторы, спиноры ...) являются элементами одной и той же алгебры.

6.3. Составные объекты геометрической алгебры трехмерного евклидова пространства

Мы уже знаем, что мультивекторный базис (47) геометрической алгебры трехмерного евклидова пространства состоит из 8 элементов четырех различных рангов, и что ее общий элемент (54) является 8-мерным. Это — один крайний случай. Другим крайним случаем является общение с мультивекторами каждого ранга по отдельности. Здесь нас будут интересовать составные объекты смешанного ранга, такие как скаляр и вектор, скаляр и бивектор, вектор и бивектор. Какие новые качества мы можем получить, синтезируя их в единое целое?

Но что означает сложить, например, скаляр с бивектором?

Именно этот момент обычно вызывает наибольшее смущение. Сложение вместе скаляра и бивектора кажется неправомочным, поскольку это различные типы величин. Но это как раз то, что мы и ожидаем от сложения. Результатом сложения скаляра и бивектора является объект, который имеет как скалярную, так и бивекторную части, совершенно таким же образом, как сложение вещественных и мнимых чисел дает объект, который имеет как вещественную, так и мнимую части. Мы называем этот последний объект «комплексным числом», и точно так же мы называем сумму скаляра и бивектора «мультивектором», подразумевая под этим, что мы объединяем объекты различного типа. Сложение скаляра и бивектора не дает одну новую величину, как в случае $2 + 3 = 5$; мы просто следим за отдельными компонентами в символе $ab = a \cdot b + a \wedge b$ или $z = x + iy$. Этот тип сложения объектов из различных пространств можно было бы обозначить символом $\oplus$, но из опыта работы с комплексными числами видно, что удобнее расширить определение обычного сложения и использовать обычный знак $+$.

Объект, состоящий из суммы скаляра и бивектора называется *кватернионом*. Кватернионы являются четными элементами геометрической алгебры. Они инвариантны по отношению к операции пространственной инверсии векторов в начале координат

$$Q = \overline{Q} = S + B, \tag{73}$$

имеют норму

$$\| Q \| = \sqrt{QQ^\dagger} \tag{74}$$

и обладают свойством деления. Наиболее полезными являются нормированные на единицу унитарные кватернионы, которые используется для описания вращений.

Унитарные кватернионы обладают свойством:

$$QQ^\dagger = Q^\dagger Q = e_0. \tag{75}$$

Обратным элементом унитарного кватерниона является эрмитово сопряженный ему кватернион:

$$Q^{-1} = Q^\dagger. \tag{76}$$

В геометрической алгебре эрмитовому сопряжению соответствует операция обращения порядка сомножителей в каждом произведении, что для бивектора выражается в изменении знака ориентации определяемой им площади.

Аналогично определяется сумма скаляра и вектора, которая получила название *паравектора*. Это понятие позволяет объединить базисные элементы алгебры Клиффорда трехмерного евклидова пространства с положительным квадратом.

Если выбранная пространственная ориентация определяется единичным вектором a, то как и раньше мы строим идемпотентные положительный и отрицательный идемпотентные паравекторы

$$P(a) = \frac{1}{2}(e_0 + a); \qquad N(a) = \frac{1}{2}(e_0 - a) \tag{77}$$

которые теперь являются 4-мерными объектами смешанного ранга и обладают следующими свойствами:

$$\begin{cases} P(a)^2 = P(a); \qquad N(a)^2 = N(a); \\ P(a)N(a) = N(a)P(a) = 0; \\ \overline{P}(a) = N(a); \quad \overline{N}(a) = P(a); \qquad P^{\dagger}(a) = P(a); \quad N^{\dagger}(a) = N(a) \\ P(a) + N(a) = e_0; \quad P^2(a) + N^2(a) = e_0; \ldots P^n(a) + N^n(a) = e_0; \\ P(a) - N(a) = a; \quad P^2(a) - N^2(a) = a; \ldots P^n(a) - N^n(a) = a; \\ aP(a) = P(a)a = P(a); \qquad aN(a) = N(a)a = -N(a). \end{cases} \tag{78}$$

В заданной системе координат $\{e_1, e_2, e_3\}$ в качестве основного направления измерения удобно выбрать орт e_3. Идемпотентные паравекторы, построенные на основе орта e_3 имеют особо важное значение и выделяются специальными обозначениями[6] [9]:

$$P = \frac{1}{2}(e_o + e_3); \qquad N = \frac{1}{2}(e_0 - e_3). \tag{79}$$

Будучи частным случаем выражения (77), они также обладают свойствами (78).

Воспользовавшись свойствами одностороннего умножения идемпотентных паравекторов P и N на определяющий их единичный вектор e_3 (последняя строка свойств (78)) и односторонним их умножением с другой стороны на произвольные элементы алгебры, введем понятие *спиноров*[7] как элементов алгебраических *идеалов* ([12], с.63–66). Идеалы — это совокупности

[6]В литературе вместо символов P и N часто используют символы E_+ и E_-, соответственно.

[7]Математическое понятие спинора было впервые введено в 1897 году Феликсом Клейном [15] для упрощения классического описания вращающегося волчка.

элементов нашей геометрической алгебры, для которых деление не определено и которые обладают определенным свойством и способны переносить это свойство на все другие элементы алгебры в процессе одностороннего умножения. Будем называть спинорами относительно единичного вектора e_3 элементы следующих идеалов:

- *положительные контравариантные спиноры*
$$Pe_3 = P; \quad APe_3 = AP, \quad \forall A \in \mathcal{G}_3; \tag{80}$$

- *отрицательные контравариантные спиноры*
$$Ne_3 = -N; \quad ANe_3 = -AN, \quad \forall A \in \mathcal{G}_3; \tag{81}$$

- *положительные ковариантные спиноры*
$$e_3P = P; \quad e_3PA^\dagger = PA^\dagger, \quad \forall A \in \mathcal{G}_3; \tag{82}$$

- *отрицательные ковариантные спиноры*
$$e_3N = -N; \quad e_3NA^\dagger = -NA^\dagger, \quad \forall A \in \mathcal{G}_3. \tag{83}$$

Идеалы положительных и отрицательных спиноров независимы.

Применяя проекционные свойства паравекторов P и N к элементам мультивекторного базиса (47) находим, что

- гильбертово пространство положительных контравариантных спиноров определяется соотношениями:
$$\begin{cases} e_0P = e_3P = P; \\ e_1P = e_{13}P = (e_1P); \\ e_2P = e_{23}P = i(e_1P); \\ e_{12}P = e_{123}P = iP. \end{cases} \tag{84}$$
Базис спинорного идеала состоит из двух элементов $\{P, (e_1P)\}$.

- гильбертово пространство отрицательных контравариантных спиноров определяется соотношениями:
$$\begin{cases} e_0N = -e_3N = N; \\ e_1N = -e_{13}N = (e_1N); \\ -e_2N = e_{23}N = i(e_1N); \\ -e_{12}N = e_{123}N = iN. \end{cases} \tag{85}$$
Базис спинорного идеала состоит из двух элементов $\{N, (e_1N)\}$.

- гильбертово пространство положительных ковариантных спиноров определяется соотношениями:

$$\begin{cases} Pe_0 = Pe_3 = P; \\ Pe_1 = Pe_{31} = (Pe_1); \\ Pe_2 = Pe_{32} = i(Pe_1); \\ Pe_{12} = Pe_{123} = iP. \end{cases} \tag{86}$$

  Базис спинорного идеала состоит из двух элементов $\{P, (Pe_1)\}$.

- гильбертово пространство отрицательных ковариантных спиноров определяется соотношениями

$$\begin{cases} Ne_0 = -Ne_3 = N; \\ Ne_1 = -Ne_{31} = (Ne_1); \\ -Ne_2 = Ne_{32} = i(Ne_1); \\ -Ne_{12} = Ne_{123} = iN. \end{cases} \tag{87}$$

  Базис спинорного идеала состоит из двух элементов $\{N, (Ne_1)\}$.

Итак, используя четырехмерные базисные паравекторы P и N, мы смогли получить четыре различные проекции всех объектов нашего восьмимерного алгебраического пространства в спинорные идеалы. При этом 8-мерный мультивекторный базис по-разному проецируется с двукратным вырождением в двумерные комплексные спинорные идеалы положительной и отрицательной определенности. Сокращение проецируемой геометрической информации за счет двукратного вырождения позволяет записывать ее в идеалах всего на двух базисных элементах с комплексными коэффициентами. Идемпотентные и нильпотентные свойства базисных элементов идеалов в сочетании со свойствами одностороннего умножения обеспечивают простоту алгебраических операций и возможность обходиться без матричных представлений. Независимость идеалов положительных и отрицательных спиноров в сочетании с особенностями проецирования позволяет записывать в них различную информацию и компенсировать потери на вырождение при условии совместного использования идеалов различной знакоопределенности.

В качестве примера найдем образ произвольного единичного вектора a в контравариантных спинорных идеалах. Если в перпендикулярной к орту e_3 плоскости $ie_3 = e_1e_2$ выбрать орт e_1 в качестве направления, от которого отсчитывается фаза[8], то, используя соотношения (79), для произвольного еди-

[8]Под фазой понимается азимутальный угол сферической системы координат, отсчитываемый от орта e_1 в направлении орта e_2.

ничного вектора a получим:

$$\begin{aligned} a = a(P+N) &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = \\ &= e_1(a_1 + e_1 e_2 a_2) + a_3 e_3 = \\ &= e_1(a_1 + i e_3 a_2) + a_3 e_3 = \\ &= a_1 e_1 (P+N) + i a_2 e_1 (P-N) + a_3(P-N) = \\ &= a_+(e_1 P) + a_3 P + a_-(e_1 N) - a_3 N, \end{aligned} \qquad (88)$$

где

$$a_+ = a_1 + i a_2, \qquad a_- = a_1 - i a_2. \qquad (89)$$

Здесь выражение

$$aP = a_3 P + a_+(e_1 P) \qquad (90)$$

характеризует вектор a в правой системе координат и является его образом в гильбертовом пространстве положительных контравариантных спиноров. В то же время выражение

$$aN = -a_3 N + a_-(e_1 N) \qquad (91)$$

описывает тот же самый вектор в левой системе координат и является его образом в гильбертовом пространстве отрицательных контравариантных спиноров.

Возможно и другое представление вектора a через составные мультивекторы смешанного ранга:

$$\begin{aligned} a = P(a) - N(a) &= \\ &= Q(a) P Q^\dagger(a) - Q(a) N Q^\dagger(a) = \\ &= Q(a)(P-N) Q^\dagger(a) \\ &= Q(a) e_3 Q^\dagger(a) \end{aligned} \qquad (92)$$

Таким образом произвольный единичный вектор трехмерного евклидова пространства можно выразить через базисный вектор, относительно которого определены спиноры, и некоторое унитарное преобразование (вращение), описываемое парой сопряженных унитарных кватернионов. Этот пример наглядно демонстрирует возможности использования мультивекторов смешанного ранга для перехода от аддитивного представления вектора к мультипликативному и наоборот.

Перейдем теперь к спинорному проецированию четырехмерных составных объектов нашей алгебры. Подставляя (88) в (77), находим общий вид контравариантного представления произвольного положительного паравектора в заданной системе координат:

$$\begin{aligned}P(a) &= \frac{1}{2}(1+a) = \frac{1}{2}(1+a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3) = \\ &= \frac{1}{2}(1+a_3)P + \frac{1}{2}(a_1+ia_2)(e_1P) + \\ &+ \frac{1}{2}(a_1-ia_2)(e_1N) + \frac{1}{2}(1-a_3)N.\end{aligned} \tag{93}$$

Аналогично для отрицательного паравектора получаем

$$\begin{aligned}N(a) &= \frac{1}{2}(1-a) = \frac{1}{2}(1-a_1e_1-a_2e_2-a_3e_3) = \\ &= \frac{1}{2}(1-a_3)P - \frac{1}{2}(a_1+ia_2)(e_1P) - \\ &- \frac{1}{2}(a_1-ia_2)(e_1N) + \frac{1}{2}(1+a_3)N.\end{aligned} \tag{94}$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что что свойства (78) для этих выражений сохраняются.

Выражая компоненты бивектора в заданной системе координат $\{e_1, e_2, e_3\}$, по-прежнему выделяя орты e_3, e_1 и разлагая e_3 на паравекторные составляющие, получаем для контравариантного кватерниона паравекторное разложение в виде

$$\begin{aligned}Q &= S - B = S - ie_1B_1 - ie_2B_2 - ie_3B_3 = \\ &= S(P+N) - ie_1(B_1 + e_1e_2B_2) - iB_3(P-N) = \\ &= (S-iB_3)P + (S+iB_3)N - \\ &- ie_1B_1(P+N) - ie_1i(P-N)B_2 = \\ &= (S-iB_3)P + (B_2-iB_1)(e_1P) + \\ &+ (S+iB_3)N - (B_2+iB_1)(e_1N) = \\ &= \alpha P + \beta e_1P - \beta^* e_1N + \alpha^* N.\end{aligned} \tag{95}$$

Комплексные коэффициенты этого разложения

$$\begin{cases}\alpha = S - iB; \\ \beta = (B_2 - iB_1); \\ -\beta^* = -(B_2+iB_1); \\ \alpha^* = S + iB_3,\end{cases} \tag{96}$$

нормированные для унитарного кватерниона соотношением

$$\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = 1, \tag{97}$$

известны под названием *параметров Кэли—Клейна*.

Условие (97) допускает два принципиально разных толкования.

Интерпретация его как вероятности достоверного события легла в основу вероятностной интерпретации квантовой механики, несмотря на то, что вероятность обычно определяется для первых степеней скалярных переменных, а не для модулей их квадратов. Вытекающая отсюда интерпретация параметров Кэли - Клейна как комплексных амплитуд вероятности имеет весьма абстрактный нефизический смысл и приводит к полной потере информации о векторных и бивекторных составляющих проецируемых геометрических объектов.

Альтернативной является интерпретация выражения (97) как геометрического места точек сферы единичного радиуса или как теоремы Пифагора [14] в трехмерном пространстве для прямоугольного треугольника, гипотенузой которого является диаметр сферы радиуса 1/2, характеризующей ориентации объекта в векторном представлении, или радиус единичной сферы, описывающей ориентации того же объекта в спинорном представлении[9]. Такое толкование позволяет связать параметры Кэли—Клейна с осью a (ориентированной плоскостью ia) и углом вращения ϑ с помощью следующих простых соотношений:

$$\begin{cases} Q = \exp(-ia\frac{\vartheta}{2}) = \cos\frac{\vartheta}{2} - ia\sin\frac{\vartheta}{2}; \\ Q^\dagger = \exp(ia\frac{\vartheta}{2}) = \cos\frac{\vartheta}{2} + ia\sin\frac{\vartheta}{2}. \end{cases} \tag{98}$$

Подставляя $S = \cos\frac{\vartheta}{2}$ и $B = i\mathbf{a}\sin\frac{\vartheta}{2}$ в (96), находим:

$$\begin{cases} \alpha = \cos\frac{\vartheta}{2} - ia_3\sin\frac{\vartheta}{2}; \\ \beta = (a_2 - ia_1)\sin\frac{\vartheta}{2}. \end{cases} \tag{99}$$

7. Геометрическая интерпретация параметров Кэли—Клейна

Несмотря на то, что проективные гильбертовы пространства положительных и отрицательных спиноров являются четырехмерными, параметры Кэли—Клейна имеют наглядную геометрическую интерпретацию.

Рассмотрим важный частный случай, когда произвольная пространственная ориентация единичного вектора m выражается через поворот из орта

[9] в этом случае множитель 1/2 относится к скалярному значению угла поворота

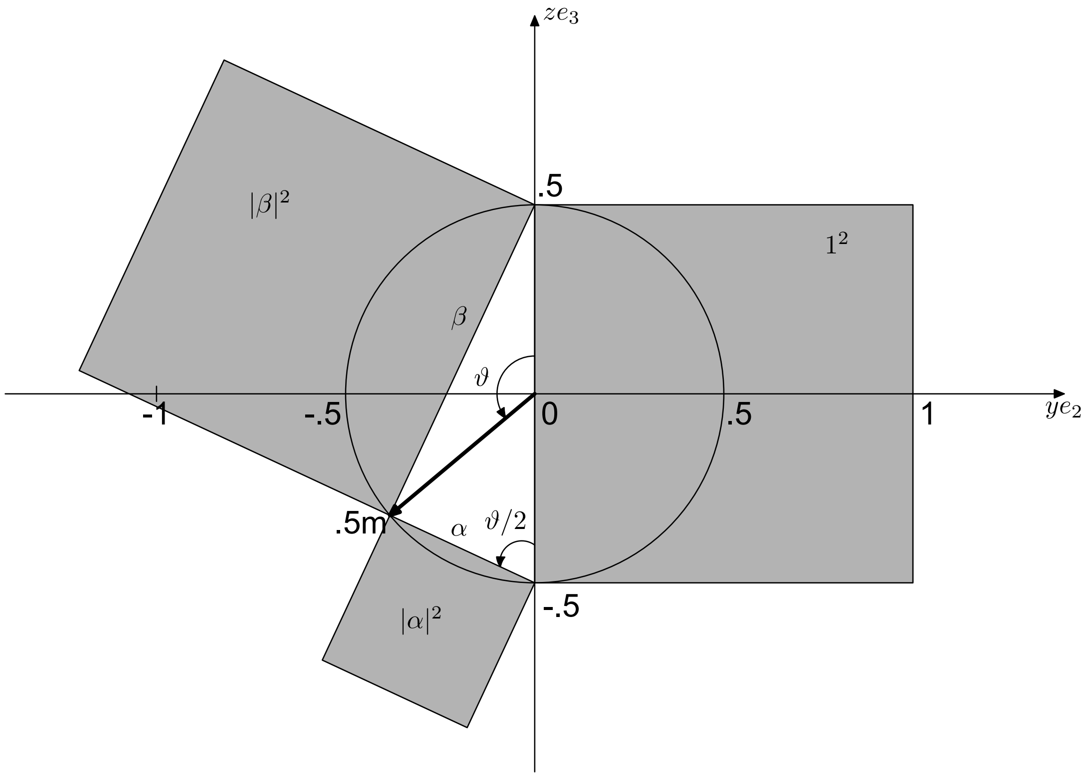

Рис. 1. Геометрический смысл параметров Кэли–Клейна в векторном пространстве состояний при повороте вектора $\frac{m}{2}$ на угол $\vartheta = 130°$ в плоскости e_2e_3.

e_3, в плоскости, проходящей через оба вектора. Такой поворот описывается двумя сопряженными унитарными кватернионами $Q(m)$ и $Q^\dagger(m)$, то есть $m = Q(m)e_3Q^\dagger(m)$. При этом бивекторная составляющая кватернионов, ортогональная вектору e_3, оказывается равной нулю, размерность кватернионов и спиноров понижается до трех измерений и возможны два представления: *векторное* и *спинорное*.

В векторном представлении множество состояний единичного вектора m ассоциируется с множеством точек на поверхности сферы радиуса $1/2$. Параметры α и β описывают положение точки состояния относительно южного и северного полюсов сферы, соответственно, рис.1

Другой вариант интерпретации основан на вращении единичного вектора m вокруг его середины, рис.2. При этом параметры α и β описывают расстояние от хвоста вектора m до северного полюса сферы радиуса $1/2$ и от северного полюса до головы вектора m, соответственно.

Спинорное представление реализуется в гильбертовом пространстве, где параметры Кэли–Клейна принимают смысл проекций точки состояния на сфере единичного радиуса на орты декартовой системы координат касатель-

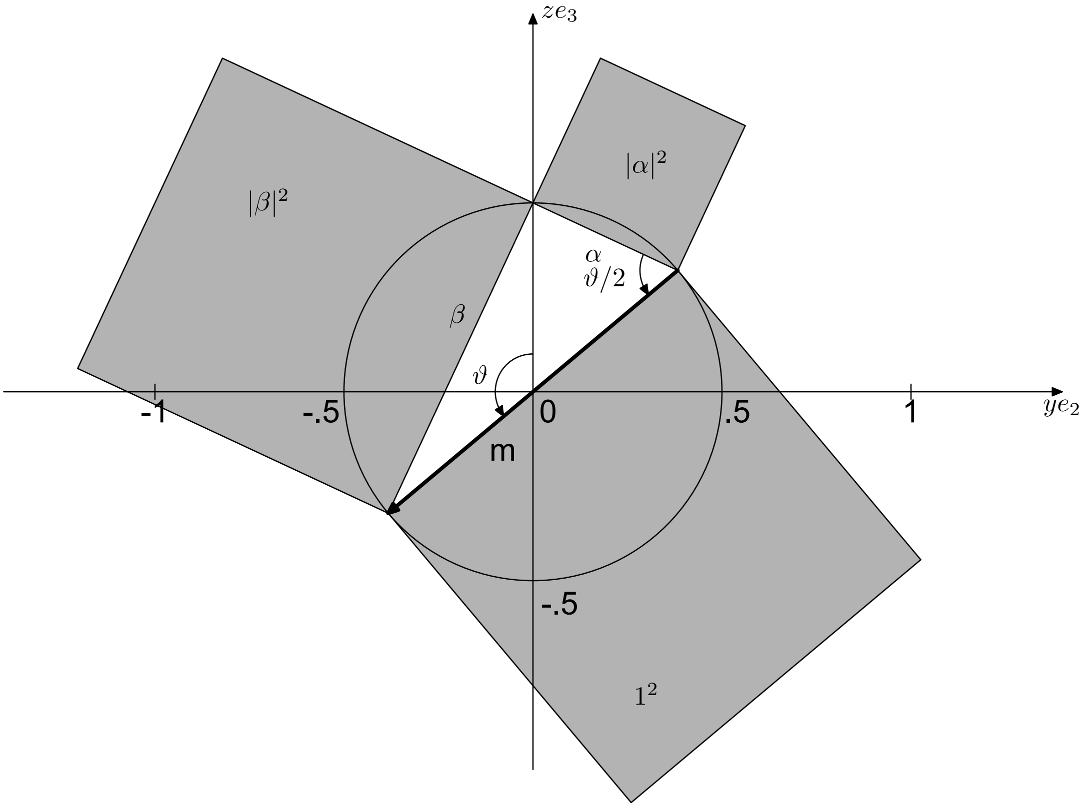

Рис. 2. Геометрический смысл параметров Кэли–Клейна в векторном пространстве состояний при повороте вектора m на угол $\vartheta = 130°$ вокруг его центра в плоскости e_2e_3.

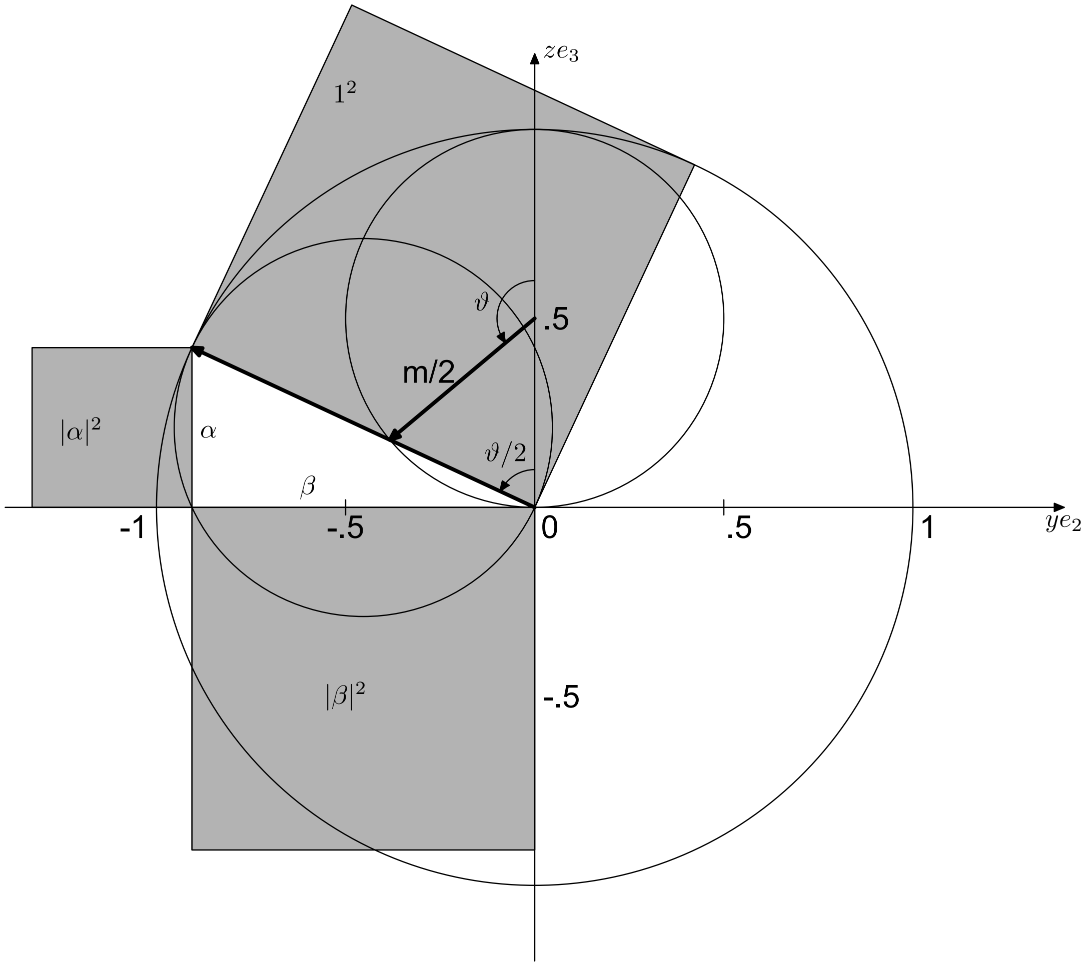

Рис. 3. Геометрический смысл параметров Кэли—Клейна в гильбертовом пространстве состояний положительных контравариантных спиноров при повороте вектора m на угол $\vartheta = 130^\circ$ вокруг его центра в плоскости e_2e_3.

ного пространства состояний. Основным отличием этого представления от предыдущего является то, что множитель $1/2$ теперь масштабирует не радиус сферы состояний, а с дугу угла места, откладываемую на сфере состояний единичного радиуса, рис.3. На азимутальный угол в поперечной плоскости масштабирующий множитель $1/2$ не распространяется. Комплексный характер параметров связан с описанием поперечных составляющих вектора состояния в полярной системе координат. Азимутальный угол φ отсчитывается от орта e_1 в направлении орта e_2. Как и в предыдущих случаях, в параметрах Кэли—Клейна содержится информация о пространственной ориентации плоскости вращения и о половине угла поворота в этой плоскости.

Воспользовавшись определением параметров Кэли—Клейна (96), находим соотношения между вектором a и связанными с ним проекторами, спинорами и кватернионами:

- Спиноры:

$$\begin{cases} \psi_+(a) = Q(a)P = \alpha P + \beta(e_1P); \\ \psi_-(a) = Q(a)N = \alpha^*N - \beta^*(e_1N); \\ \psi_+^\dagger(a) = PQ^\dagger(a) = \alpha^*P + \beta^*(Pe_1); \\ \psi_-^\dagger(a) = NQ^\dagger(a) = \alpha N - \beta(Ne_1). \end{cases} \tag{100}$$

- Паравекторы:

$$\begin{cases} P(a) = \psi_+(a)\psi_+^\dagger(a) = \\ \qquad = \alpha\alpha^*P + \alpha\beta^*(e_1P) + \beta\alpha^*(Pe_1) + \beta\beta^*(e_1Pe_1) = \\ \qquad = \alpha\alpha^*P + \beta\alpha^*(e_1P) + \alpha\beta^*(e_1N) + \beta\beta^*N; \\ N(\mathbf{a}) = \psi_-(\mathbf{a})\widetilde{\psi}_-(\mathbf{a}) = \\ \qquad = \beta\beta^*(\mathbf{e}_1N\mathbf{e}_1) - \alpha^*\beta(Ne_1) - \alpha\beta^*(e_1N) + \alpha\alpha^*N = \\ \qquad = \beta\beta^*P - \alpha^*\beta(e_1P) - \alpha\beta^*(e_1N) + \alpha\alpha^*N = \end{cases} \tag{101}$$

- Кватернионы:

$$\begin{cases} Q(a) = Q(a)P + Q(a)N = \\ \qquad = \psi_+(a) + \psi_-(a) = \\ \qquad = \alpha P + \beta(e_1P) + \alpha^*N - \beta^*(e_1N); \\ \widetilde{Q}(\mathbf{a}) = PQ^\dagger(a) + NQ^\dagger(a) = \\ \qquad = \psi_+^\dagger(a) + \psi_-^\dagger(a) = \\ \qquad = \alpha^*P + \beta^*(Pe_1) + \alpha N - \beta(Ne_1); \end{cases} \tag{102}$$

- Вектор:

$$\begin{aligned} a &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = \\ &= a_3P + a_+(e_1P) - a_3N + a_-(e_1N) = \\ &= P(a) - N(a) = \\ &= (\alpha\alpha^* - \beta\beta^*)P + 2\alpha\beta^*(e_1P) - \\ &- (\alpha\alpha^* - \beta\beta^*)N + 2\alpha^*\beta(e_1N). \end{aligned} \tag{103}$$

- Скаляр:

$$\begin{aligned} 1 &= (a)^2 = \\ &= P(a) + N(a) = \\ &= (\alpha\alpha^* + \beta\beta^*)P + (\alpha\alpha^* + \beta\beta^*)N. \end{aligned} \tag{104}$$

Таким образом параметры Кэли—Клейна определяют *информационный потенциал* рассматриваемого воздействия (состояния), который далее может быть выражен (реализован) в векторном, паравекторном, кватернионном (бивекторном) и спинорном представлении. Для полного восстановления любого из указанных объектов достаточно знать всего два разноименных параметра α и β.

Заметим, что кватернионы и спиноры обладают линейной зависимостью от параметров Кэли—Клейна, в то время как векторы, паравекторы и скаляры выражаются через их квадратичные формы.

8. Обсуждение результатов

Воспользовавшись элементарными алгебраическими свойствами геометрической алгебры трехмерного евклидова пространства, нам удалось взглянуть на содержащиеся в нем геометрические объекты с необычной точки зрения — через четырехмерные составные мультивекторы смешанного ранга: паравекторы, кватернионы и спиноры.

Вместо обычного разложения их по трем проекциям мы получили возможность раскладывать их же по четырем независимым спинорным проекциям. Такое проецирование оказалось интересным с нескольких точек зрения.

Во-первых, оно допускает очень плотное кодирование геометрической информации через формализм параметров Кэли—Клейна с последующим использованием ее в спинорных, кватернионных, векторных и паравекторных образах рассматриваемого объекта. Во-вторых, оно допускает стереоскопическое восстановление геометрии восьмимерных алгебраических объектов при совместном использовании подпространств различной знакоопределенности.

Наиболее простое описание динамики изменения состояний объекта достигается в спинорных и кватернионных его представлениях, которые линейны относительно параметров Кэли-Клейна.

Кватернионы позволяют описывать вращения как преобразования распределений, не привязываясь к конкретным начальным условиям. Простота описания симметрий, отражений и вращений позволяет использовать язык геометрической алгебры для описания регулярных геометрических структур любой степени сложности.

Мы успели добраться только до трехмерного пространства. А что будет дальше? Где взять еще одно пространственное измерение? Здесь уже не обойтись без тензорного умножения, приводящего к фрактальному удвоению пространства с повторением свойств обычного трехмерного евклидова пространства но уже в новом качестве. Если первое пространство позволяет описать вектором некоторую точку, то вторoe — касательное — может уже описывать некоторую (мульти)векторную величину в этой точке. И так далее.

По мере увеличения размерности векторного пространства будут меняться и свойства геометрической алгебры. Они имеют период 8. С учетом симметрий этот период может быть уменьшен до 4.

Познакомившись со спинорными идеалами и с возможностью выражения их базисных элементов через составные элементы мультивекторного базиса, начинаешь задумываться: а какая из этих структур более проста? С одной стороны, элемент спинорного базиса e_1P является просто единичным левым недиагональным элементом матрицы размера 2×2. Но, с другой стороны, он же является составным мультивектором смешанного ранга, состоящим из суммы вектора и бивектора. Да еще и делителем нуля!

Наша интуиция здесь кончается. Требуется творческое мышление, творческое освоение этого неожиданно открывшегося и еще не познанного пространства.

Чем это может быть интересно для аналитического программирования информационно-обменных процессов активных биологических форм? Новыми принципами кодирования и переноса информации. Новыми информационными сечениями. Новыми принципами построения фрактальных проекций. Новыми возможностями фрактализации пространства и содержащейся в нем информации. Новым пониманием сути самих информационно-обменных процессов. Новыми принципами стереоскопического восстановления фрактальных структур, закодированных в спинорных проекциях...

Дверь открыта. Добро пожаловать!

Список литературы

[1] D. Hestenes. A Unified Language for Mathematics and Physics // In: J.S.R. Chisholm/A.K. Commons (Eds.), Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics. Reidel, Dordrecht/Boston (1986), 1–23.

[2] *Марчук Н.* Командировка в Кэмбридж // <http://wwwuniphys.ru/journal/N3-01/kambrige/kambrige.htm>

[3] *Hestenes D.* Oersted Medal Lecture 2002: Reforming the Mathematical Language of Physics // <http://ModelingNTS.la.asu.edu/GC_R&D.html>

[4] *Kline M.* Mathematical Thought from Ancient to Modern Times // Oxford University Press, 1972.

[5] *Doran C. J. L.* Geometric Algebra and its Applications to Mathematical Physics // PhD thesis, University of Cambridge, February, 1994. — 181 p.

[6] *Atiyah M. F., Singer I. M.* The index of elleptic operators on compact manifolds // Bull. A.M.S., 1963, Vol. 69, P. 422.

[7] *Lawson H. B., Michelsohn M.-L.* Spin Geometry // Princeton University Press, 1989.

[8] *Hestenes D.* Clifford algebra and the interpretation of quantum mechanics // In J.S.R. Chisholm and A.K. Common, editors, Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics, page 321. D. Reidel, 1986.

[9] *Тарханов И.И.* Геометрическая алгебра, ЯМР и обработка информации // СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2002. — 214 с.

[10] *Salingaros N.* On the classification of Clifford algebras and their relation to cpinors in *n* dimentions // J. Math. Phys., 1982, Vol. 23, No. 1, P. 1–7.

[11] *Hestenes D.* The design of linear algebra and geometry // Acta Appl. Math., 1991, Vol. 23, P. 65.

[12] *Казанова Г.* Векторная алгебра. Пер. с фр. // М.: Мир, 1979. — 120 с. / Переиздано: *Казанова Г.* От алгебры Клиффорда до атома водорода. Пер. с фр. // Волгоград: Платон, 1997. — 120 с.)

[13] *Cini M.* Quantum Mechanics without Waves: a Generalization of Classical Statistical Mechanics // LANL E-print arXiv: quant-ph/9807001 1 Jul 1998, P. 1–26.

[14] *Дудкин В. И., Тарханов В. И.* Применение алгебры Клиффорда для описания импульсных методов магнитного резонанса // Труды ЛПИ, 1982, Вып. 387 «Квантовая электроника», С. 67–72.

[15] *Klein F.* The mathematical theory of the top // Gordon and Breach, New york, 1897; F. Klein, A. Sommerfeld / Theorie des Kreisels // Teubner, Leipzig, 1897-1910.